

Zadaci s pismenih ispita iz Matematike I četvrti dio

1. Konopcem duljine 12 metara treba omeđiti dio ravnog terena oblika kružnog isječka najveće moguće površine. Kolika je ta površina?
2. U polukrug polumjera $r=2$ upišite jednakokrani trapez tako da mu je $a=2r$, a površina maksimalna. Kolika je površina tog trapeza?
3. U lik omeđen parabolom $y = -x^2 + 12$ i osi x upišite pravokutnik maksimalne površine. Odredite tu površinu.
4. U lik omeđen grafom funkcije $f(x) = \sqrt{12-x}$ i koordinatnim osima upišite pravokutnik maksimalne površine. Odredite tu površinu.
5. U lik omeđen grafom funkcije $f(x) = \sqrt{x-12}$ i koordinatnim osima upišite pravokutnik maksimalne površine. Odredite tu površinu.
6. Dva vrha pravokutnika nalaze se na osi x , a druga dva na grafu funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Odredite koordinate vrhova na grafu tako da površina bude maksimalna. Odredite tu površinu.
7. Dva vrha pravokutnika nalaze se na grafu funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, a druga dva na njenoj horizontalnoj asimptoti. Odredite koordinate vrhova na grafu tako da površina pravokutnika bude maksimalna.
8. Dva vrha pravokutnika nalaze se na grafu funkcije $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ a druga dva na grafu funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. Odredite koordinate vrhova tako da površina pravokutnika bude maksimalna.
9. Kugli polumjera R opišite stožac minimalnog volumena. Koliki je volumen tog stošca?
10. U kuglu polumjera R upisana su dva uspravna stošca zajedničke baze s vrhovima u dijametralno suprotnim točkama. Odredi maksimalnu vrijednost sume njihovih volumena.
11. U polukuglu radijusa R upisan je stožac s vrhom u centru baze polukugle. Odredite radijus baze stošca maksimalnog volumena.
12. U sferu polumjera π^3 upišite valjak maksimalnog volumena.
13. U segment parabole $y = -\frac{1}{8}x^2 + x$ kojeg odsijeca tetiva $y=0$ upiši pravokutnik maksimalne površine.
14. U otvoreni cilindrični rezervoar stane V litara vode. Kolika mu je visina, ako mu je oplošje minimalno?
15. Savijte žicu duljine 16 metara u istokrani trokut maksimalne površine. Kolike su stranice i površina tog trokuta?

16. Od 10m^2 lima treba napraviti gore otvorenu posudu oblika valjka maksimalnog volumena. Koliki treba biti omjer promjera baze i visine posude?
17. U trokut koga obrubljuju tangenta na $f(x) = \frac{1}{x}$ u točki $M(2, y)$ i koordinatne osi upišite pravokutnik maksimalne površine.
18. Prozor ima oblik pravokutnika s polukrugom na vrhu. Opseg ruba prozora je 4m. Kolika treba biti širina prozora da mu površina bude maksimalna?
19. Žicu duljine 16m treba prerezati na dva dijela. Jedan dio se savije u kružnicu, a drugi u rub kvadrata. Odredite duljine dijelova žice tako da suma površina dobivenih likova bude minimalna.
20. U kvadrat $|x| + |y| \leq 4$ upisati pravokutnik maksimalne površine (tako da vrhovi pravokutnika leže na stranicama kvadrata.)
21. Točkom $T(1,3)$ položite pravac koji s koordinatnim osima čini trokut najmanje površine. Koliki je koeficijent smjera tog pravca?
22. Odredite $a \in \mathbb{R}$ tako da tjemena parabola $y = ax^2 - 2x + 2$ i $y = 2ax^2 - 2x + 1$ budu najmanje udaljena.
23. Na paraboli $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ odredite točku P , na luku između ishodišta O i tjemena parabole T , tako da površina trokuta OTP bude najveća.
24. Oko kugle polumjera r uspravni opisan je stožac čija je izvodnica nagnuta prema ravnini pod kutom α . Odrediti kut α tako da volumen stošca bude maksimalan.
25. Odredite koliki treba biti omjer visine i polumjera baze limenke pive od pola litre da se za njenu izradu potroši najmanje materijala.
26. Odredite najveću bazu logaritamske funkcije tako da postoji broj koji je jednak svom logaritmu po toj bazi.
27. Na paraboli $y = 3x^2$ odredi onu točku koja je najbliža točki $T(0,3)$.
28. U pravokutni trokut zadanih kateta $a=3\text{cm}$, $b=4\text{cm}$ upišite pravokutnik maksimalne površine, tako da mu jedna stranica leži na hiptenuzi trokuta. Kolika je površina tog pravokutnika?
29. Odredite koordinate vrhova pravokutnika maksimalne površine upisanog u lik omeđen krivuljama $y = x^2 + 4x + 6$ i $y = -x^2 - 4x + 4$.
30. Vrh trokuta je točka $C(6,0)$. Vrhovi A i B sjecišta su pravca okomitog na os x i krivulje $y^2 = 4x$. Na kojoj udaljenosti od ishodišta, a lijevo od točke C treba nacrtati taj pravac da površina trokuta bude maksimalna?
31. Vrh trokuta je točka $C(1,0)$. Vrhovi A i B sjecišta su pravca okomitog na os x i krivulje $y^2 = 16 - 4x$. Na kojoj udaljenosti od ishodišta, a desno od točke C treba nacrtati taj pravac da površina trokuta bude maksimalna?

32. Na grafu funkcije $f(x) = 2\sqrt{\ln x}$ odredite točku koja je najbliža točki $T(3,0)$.
33. Odredite a i b tako da pravac $y = -2x + 4$ bude tangenta parabole $y = ax^2 + b$ u točki $T(1,2)$. U lik koji parabola zatvara s osi x upišite pravokutnik maksimalne površine.
34. Odredite a i b tako da pravac $y = -2x + 13$ bude tangenta parabole $y = -x^2 + ax + b$ u točki $T(1,11)$. U lik koji parabola zatvara s osi x upišite pravokutnik maksimalne površine.
35. U trokutu kut $\alpha = \frac{\pi}{6}$, a suma duljina stranica $b + c = 100\text{cm}$. Kolika treba biti stranica c pa da površina trokuta bude maksimalna?
36. U lik omeđen parabolom $y = \frac{-1}{2}x^2 + x$ i osi x upišite jednakokračan trapez maksimalne površine, tako da su mu dva vrha u sjecištima parabole s osi x a druga dva na paraboli.
37. U lik omeđen parabolom $x = \frac{-1}{2}y^2 + y$ i osi y upišite jednakokračan trapez maksimalne površine, tako da su mu dva vrha u sjecištima parabole s osi y a druga dva na paraboli.
38. Hipotenuza jednakokračnog pravokutnog trokuta leži na pravcu $y=x$, katete su paralelne s koordinatnim osima i vrh C leži na grafu funkcije $f(x) = e^x + 1$. Odredite koordinate vrhova tako da površina trokuta bude minimalna. Skicirajte.
39. Na pravcu $x + y - 4 = 0$ odredite točku T tako da suma kvadrata udaljenosti te točke od točaka $A(2,5)$ i $B(7,0)$ bude minimalna.
40. Hipotenuza jednakokračnog pravokutnog trokuta leži na pravcu $y=x$, katete su paralelne s koordinatnim osima i vrh C leži na grafu funkcije $f(x) = \ln(x - 1)$. Odredite koordinate vrhova tako da površina trokuta bude minimalna.
41. (a) Pokažite da su tangente na krivulju $y = \frac{x - 4}{x - 2}$ u sjecištima krivulje s koordinatnim osima međusobno paralelne.
(b) Odredite diralište tangente povučene iz točke $T(0,1)$ na tu krivulju.
42. Napišite jednadžbe tangenti na krivulju $y = \frac{\ln x^2}{2}$ koje prolaze ishodištem.
43. U jednadžbi pravca $y=x+l$ odredite l tako da pravac bude tangenta na graf funkcije $f(x) = \frac{x}{x+4}$.
44. Napišite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \ln \frac{1-x}{x+5}$ u točki infleksije.
45. Koji kut s osi y zatvara graf funkcije zadane formulom $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$ u sjecištu s osi x ?
46. Odredite jednadžbu normale na graf funkcije zadane formulom $f(x) = e^{2x} + e^x - 2$ u točki u kojoj graf siječe os x .

47. Odredite kut između tangenti povučeni na krivulju $y = x^2 - 2x$ iz točke $T(1,-2)$.
48. Napišite jednadžbu tangente i normale krivulje $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ u točki presjeka s osi x .
49. Odredite parametre a, b, c tako da parabola $y = ax^2 + bx + c$ dodiruje parabolu $y = -x^2 + 2x - 4$ u točki $(2,-4)$, a da joj tjeme leži na pravcu $x=3$.
50. Zadana je funkcija formulom $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$ i točka grafa funkcije $T(2,?)$. Kolika je površina trokuta što ga s koordinatnim osima čini tangenta na graf u toj točki?
51. Odredite točku u kojoj se sijeku i kut pod kojim se sijeku krivulje $y = \sqrt{8x - x^2}$ i $y = x\sqrt{\frac{x}{2-x}}$.
52. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije zadane formulom $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$, ako je apscisa dirališta $x_0 = \frac{1}{\pi}$.
53. Odredite Taylorov polinom 3. stupnja u točki $x_0 = 0$ za funkciju zadanu formulom $f(x) = \text{Arcsin}x$. Skicirajte graf zadane funkcije i dobivenog polinoma.
54. Odredite Taylorov polinom 3. stupnja u točki $x_0 = 2$ za funkciju zadanu formulom $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Skicirajte graf zadane funkcije i dobivenog polinoma.
55. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$. Odredite polumjer zakrivljenosti i jednadžbu osculacione kružnice u točki grafa $T=(1,1)$. Skicirajte odgovarajuću sliku.